Ten eerste: als jij aan wiskunde een broertje dood hebt, kun je beter nu meteen iets anders gaan lezen. Ik begin met een beetje noodzakelijke voorkennis die ik in *dit* document niet in detail uitleg of afleid. Je moet bevobbeld al wat van *goniometrie* hebben geleerd en weten wat de sinus, cosinus & tangens zijn, alsmede de sinus & cosinus van de som van twee hoeken en díé geef ik meteen maar even:

De **conservatieven**:	*eigen volk eerst*	en ze zijn *tégen*	alle socialisten;
$\cos(\alpha+\beta) =$	$\cos\alpha\ \cos\beta$	$-$	$\sin\alpha\ \sin\beta$
$\sin(\alpha+\beta) =$	$\cos\alpha\ \sin\beta$	$+$	$\sin\alpha\ \cos\beta$
de **socialisten**:	*iedereen gelijkwaardig*	en ze zijn *vóór*	alle mogelijke samenlevingsvormen.

Verder heeft Simon Stevin[1] het Latijnse woord *quadratum* (herken je *quadra* = *vier*?) in het Nederlands vertaald als *vierkant*.

Daarom heet de *kwadratische vergelijking* ook wel: **vierkantsvergelijking**[2]:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

waarvan we de oplossing vinden met de abc-formule[3]:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Onder het wortelteken staat daarin de: **discriminant:**

$$D := b^2 - 4ac$$

Wat je uiteraard al lang hebt geleerd: *plus maal plus is plus* en *min maal min is* ook *plus*, dus een kwadraat kan nóóit negatief zijn. Dan heeft een negatief getal (dat dus géén kwadraat kan zijn) ook géén wortel, in tegenstelling tot het paard van Sinterklaas 😎.

Als dus:	$D > 0$	dan zijn er (dankzij de "$\pm$") twéé oplossingen, twee waardes van x waarvoor 't klopt;
als:	$D = 0$	bestaat er slechts één oplossing;
en als:	$D < 0$	helemaal geen.

Maar... ***er bestaan niet-bestaande oplossingen...*** wat natuurlijk tegenstrijdig is. Weet je wat? We doen gewoon net alsof ze bestaan en dat wordt dan iets *denkbeeldigs*. Een ander woord voor *denkbeeldig* is *imaginair* en daarop gebaseerd *verzinnen* we een "getal" dat we i zullen noemen. We definiëren dit *denkbeeldige* oftewel *imaginaire* getal als volgt:

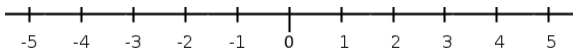
$$i^2 = -1$$

en eigenlijk[4] kan dat dus helemaal niet, maar we doen gewoon net alsof en dan zien we wel wat eruit gaat komen. Als nu $i^2 = -1$, dan geldt vanzelfsprekend $i = \pm\sqrt{-1}$ en dan hebben we tóch een wortel uit een negatief getal, maar dat is dus ***imaginair*** (*denkbeeldig*); het is niet een *écht* (oftewel ***reëel***) getal. Van de net genoemde "$\pm$" *kiezen* we het plusteken en dan wordt de definitie:

$$i := \sqrt{-1}$$

Vanaf nu hebben we dus ***reële*** en ***imaginaire*** getallen.

De *reële* getallen liggen natuurlijk gewoon op de *getallenlijn*, waarvan ik alleen maar een paar gehele getallen toon:



Maar wáár oh waar zouden we we nu die *imaginaire* getallen kunnen plaatsen? Het moge duidelijk zijn dat ze per se niet op deze *getallenlijn* thuishoren, die is immers gereserveerd voor de *reële* getallen. Zullen

[1] https://nl.wikipedia.org/wiki/Simon_Stevin

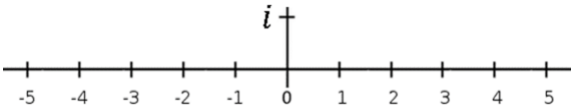
[2] Helaas wordt die term in het moderne onderwijs niet meer gebruikt, maar ik hanteer bij voorkeur *mijn moers taal* (how well I best well readly goodly Engels can speeching, whore) en precies om díé reden (natuurlijk niet omdat ík dat prefereer, maar hijzelf dus kennelijk ook) heeft Simon Stevin het hele scala aan Latijnse/Griekse termen vertaald; *vierkant* is er slechts één van.

[3] Het is **volkomen door en door hartstikke fout** om een *formule* te noemen naar de *letters* die erin voorkomen. Je moet 'm noemen naar waar hij voor díént: ***oplossing van de vierkantsvergelijking***. De stelling van Πυθαγορας (Pythagoras) is ook een abc-formule. Maar je moet een stelling ook niet noemen naar iemand die 'm feitelijk helemaal níét als eerste heeft ontdekt: op het 1000 jaar oudere Soemerische kleitablet Plimpton 322 staan getallenreeksen die aan "zijn" stelling voldoen.

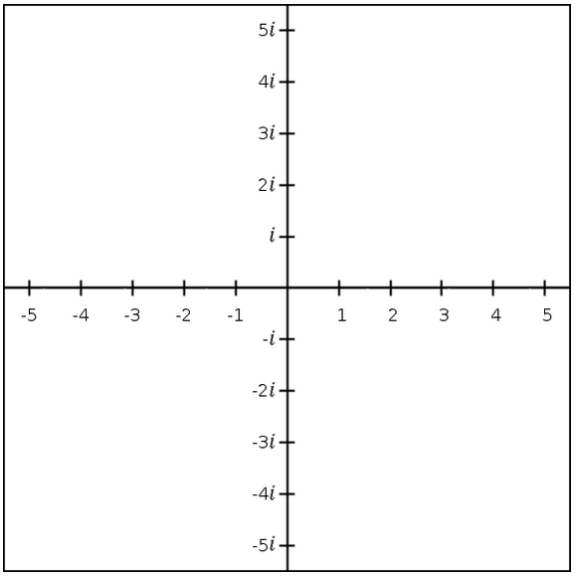
[4] Eigenlijk moet je nooit *eigenlijk* zeggen.

 Copyright © 2025, Henk Reints, MSc.

we i er dan maar gewoon bóven zetten? En lijkt het je logisch om voor de "grootte" van i gewoon 1 te *kiezen*? En heet *getalgrootte* niet gewoon *absolute waarde*? En is dat niet doodgewoon de *afstand tot nul*? En lijkt het jou verstandig om i dan mooi precies *loodrecht* boven de *nul* te zetten? En dan dus op een afstand gelijk aan 1? Kun je op je klompen aanvoelen, toch?



Als we nu i met bijv. 2 vermenigvuldigen, dan wordt dat uiteraard $2i$, nietwaar? En zo kunnen we natuurlijk álle veelvouden van i vinden, maar ik toon hieronder alleen maar enkele gehele veelvouden.



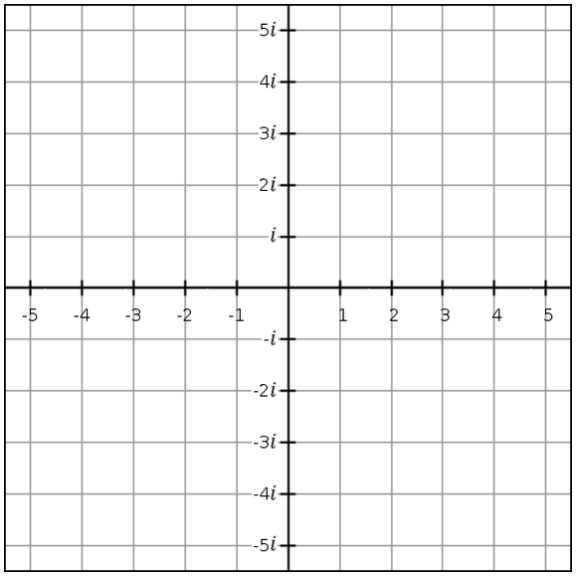
Nu hebben we ineens twéé *getallenlijn*en, prachtig loodrecht op elkaar, alsof de *reële getallenlijn* een kwartslag ***gedraaid*** is! En zie je dat *nul* best wel een bijzonder getal is? Zowel *reëel* als *imaginair*!

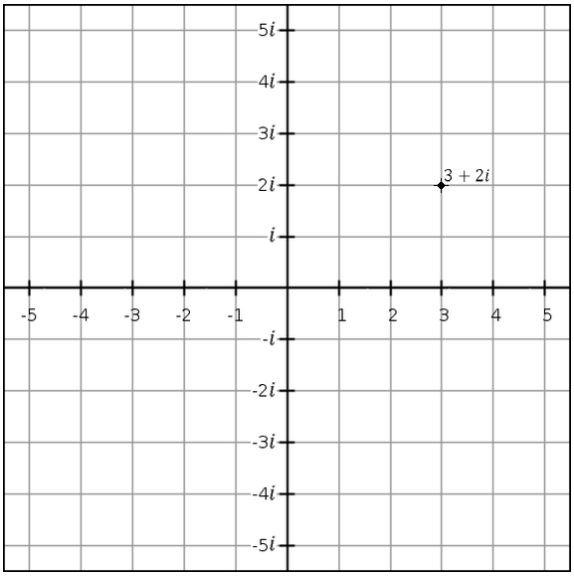
We noemen beide lijnen de: ***reële as***

en de: ***imaginaire as***.

Is het je duidelijk dat we nu in feite een (getallen)*vlak* hebben in plaats van slechts twee (getallen)*lijn*en?

Laten we er dus maar een *rooster* intekenen *en dan ook maar ergens een willekeurig punt*.





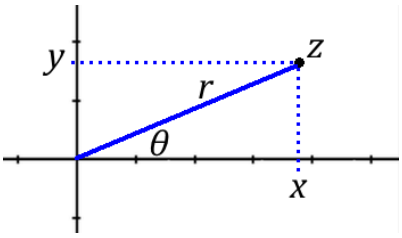
Zie je ook dat we nu élk punt van dat vlak kunnen beschouwen als de som van een *reëel* en een *imaginair* getal? En zullen we zo'n punt voortaan maar gewoon een *getal* noemen? We hadden al de *reële* en de *imaginaire* getallen en daar bovenop hebben we nu ook nog *complexe* getallen. Dat woord komt van het Latijnse *complector* en dat betekent *omvatten*, *omarmen*, *koesteren*. De verzameling van de *complexe* getallen $\mathbb{C}$ *omvat* álle getallen die we tot nu toe kennen: $\mathbb{C} \supset \mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$. Als we een complex getal met slechts één symbool willen aanduiden, gebruiken we daarvoor vrijwel altijd de letter z. Als je hem met de hand schrijft is het hééél verstandig om er een streepje doorheen te zetten: $\not{z}$. Dat

 Copyright © 2025, Henk Reints, MSc.

voorkomt verwarring met de handgeschreven $\mathbf{2}$. Je moet jezelf er *nú* van overtuigen dat je de (losse) $\boldsymbol{z}$ voortaan áltijd als een $\cancel{\boldsymbol{z}}$ moet schrijven. Dit is helemaal vergelijkbaar met het veel voorkomende streepje door de zeven. Op de computer kun je de gewone $\boldsymbol{z}$ blijven gebruiken (dat ga ik *hier* ook doen), want daar is verwarring onwaarschijnlijk.

Het lijkt me vanzelfsprekend dat een *complex* getal natuurlijk niet per se $\mathbf{3+2}\boldsymbol{i}$ hoeft te zijn zoals hierboven getekend, maar dat we gewoon de algemene notatie $\boldsymbol{z=a+bi}$ kunnen gebruiken en dan kan het overal in het zogeheten *complexe vlak* liggen. Als $\boldsymbol{z}$ echter een *variabele* is in plaats van een *constante*, dan noteren we hem als $\boldsymbol{z=x+iy}$ en dan is $\boldsymbol{x}$ natuurlijk het *reële* deel van $\boldsymbol{z}$ en $\boldsymbol{y}$ het *imaginaire*, wat we vaak noteren als $\boldsymbol{x=\mathrm{Re}(z)}$ en $\boldsymbol{y=\mathrm{Im}(z)}$.

Een *complex* getal is zoals gezegd gewoon de som van een *reëel* en een *imaginair* getal en dat kunnen we niet verder vereenvoudigen. Het *moet* als een som worden genoteerd. Oh ja?



Zou het ook kunnen met de *afstand tot de oorsprong* (die we $\boldsymbol{r}$ noemen) en de *hoek* die die verbindingslijn maakt met de x-as? Die hoek noteren we als $\boldsymbol{\theta}$ (theta) en in de *complexe wiskunde* noemen we die hoek het ***argument*** van $\boldsymbol{z}$. En zie je dat deze $\boldsymbol{r}$ gewoon de *absolute waarde* van $\boldsymbol{z}$ is? Afstand tot *nul*, toch? Dat staat verder naar boven toch al? We noemen $\boldsymbol{r}$ ook wel de *straal*, alsof we met een *cirkel* bezig zijn. *Verdraaid* nog an toe zeg, zei ik daarnet niet dat de *imaginaire* as op een *gedraaide reële* as lijkt? De combinatie $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta})$ oftewel *straal* en *argument* noemen we overigens *poolcoördinaten*.

Het lijkt me ook duidelijk dat: $$\boldsymbol{\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}}$$

oftewel[5]: $$\boldsymbol{\arg(z)=\arctan\frac{y}{x}=\arctan\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}}$$

alsmede: $$\boldsymbol{|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2}}$$

Zie je dat ik gewoon de stelling van $\Pi\upsilon\theta\alpha\gamma o\rho\alpha\varsigma$ (Pythagoras dus) heb gebruikt om $\boldsymbol{r}$ uit te rekenen?

Stel nu eens dat we twéé *complexe* getallen
hebben, te weten: $$z_1=a+bi$$
en: $$z_2=c+di$$

Hoe zou je die bij elkaar kunnen optellen? Nou, gewoon achter mekaar zetten[6] met een plus ertus, dus.

$$z_\mathrm{s}=a+bi+c+di=(a+c)+(b+d)i$$

en dan geldt dus: $$\mathrm{Re}(z_\mathrm{s})=a+c=\mathrm{Re}(z_1)+\mathrm{Re}(z_2)$$
alsmede: $$\mathrm{Im}(z_\mathrm{s})=b+d=\mathrm{Im}(z_1)+\mathrm{Im}(z_2)$$

Het subscript $\mathbf{s}$ staat vanzelfsprekend voor "som". En hoe kun je ze van elkaar aftrekken? Nou, dat kan doodgewoon níét. Je kunt wel de ene van de andere aftrekken 😊. Beredeneer zelf hoe dat zou moeten. Oh, eh, nou, ja, eh, moet je dan niet, eh, gewoon, eh... Jawel!

Zou je *complexe* getallen ook kunnen *vermenigvuldigen*? Nou, dat kunnen we toch gewoon proberen?

$$\boldsymbol{z_\mathrm{p}=z_1z_2=(a+bi)(c+di)}$$

Het subscript $\mathbf{p}$ staat natuurlijk voor "product" en je hebt vast al lang geleerd hoe je het rechterdeel van deze vergelijking moet berekenen, toch? Gewoon die $\boldsymbol{i}$ als een willekeurige *constante* beschouwen en gaan met die banaan:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z_\mathrm{p}}&=\boldsymbol{a\cdot c+a\cdot di+bi\cdot c+bi\cdot di}\\&=ac+adi+bci+bdii\\&=\boldsymbol{ac+(ad+bc)i+bdi^2}\end{aligned}$$

Weet je nog hoe we $\boldsymbol{i}$ hadden gedefinieerd? Was dat niet: $\boldsymbol{i^2=-1}$?

---

[5] Ik schrijf áltijd: arcsin, arccos & arctan en nóóit: $\sin^{-1}$ etc. omdat ik het **hé-le-maal fout** vind om een *inverse functie* aan te duiden met een exponent, temeer omdat we ook $\sin^2 x$ etc. schrijven. $\sin^{-1}$ is $1/\sin$, punt uit! **Verzin toch een beter symbool dan een GETAL om de inverse aan te duiden, dames & heren mathematici!** Ik vind het net zo **DOM** als $\log x$ schrijven als het de *natuurlijke logaritme* betreft. Die heet $\ln x$, **verdorie!** Zonder grondtal is $\log x={}^{10}\log x=\log_{10}x$.

[6] *Achter elkaar* kan helemaal niet, denk daar maar eens over na.

 Copyright © 2025, Henk Reints, MSc.

Zullen we dat maar gewoon gebruiken?
We krijgen dan: $$\boldsymbol{z_p = (ac - bd) + (ad + bc)i}$$

Duidelijk? We kunnen *complexe* getallen dus gewoon *vermenigvuldigen*! Wil je van me geloven dat *delen* dan ook kan? Maar laten we nu eerst eens even kijken of we van $\boldsymbol{z_p}$ ook de *poolcoördinaten* kunnen vinden. Uiteraard gebruiken we daarvoor wat we inmiddels al hebben afgeleid en beredeneerd.

Pythagoras: $$\boldsymbol{r_p = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2}}$$

even $$= \sqrt{(ac)^2 - 2(ac)(bd) + (bd)^2 + (ad)^2 + 2(ad)(bc) + (bc)^2}$$
'n partij $$= \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd + (ad)^2 + (bc)^2 + 2abcd}$$
moeilijk $$= \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2}$$
doen $$= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2}$$
levert: $$\boldsymbol{= \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2}}$$

Wat we natuurlijk ook hebben is: $$\boldsymbol{r_1 = \sqrt{a^2 + b^2}}$$
en: $$\boldsymbol{r_2 = \sqrt{c^2 + d^2}}$$
dus: $$\boldsymbol{r_1 r_2 = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}}$$
oftewel: $$\boldsymbol{= \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2}}$$

Verroest! Dat hadden we nét ook al! Precies hetzelfde!
Maar dan geldt onomstotelijk: $$\boldsymbol{r_p = r_1 r_2}$$

De *straal* van een *product* is het product der *stralen* beider factoren!

Dá's handig! Verrekte handig, zou ik wel durven zeggen! *Kei-hendug* op zun Hellemons gezeed.

Nu moeten we ook het *argument* nog zien te vinden.
Uiteraard geldt: $$\tan\theta_p = \frac{\mathrm{Im}(z_p)}{\mathrm{Re}(z_p)} = \frac{ad+bc}{ac-bd}$$

Kijk nu nog eens naar het plaatje waar ik $\boldsymbol{r}$ en $\boldsymbol{\theta}$ heb geïntroduceerd. En helemaal vooraan had ik al gesteld dat gij alreeds het een en ander van *goniometrie* hebbe geleerd en dan begrijpe gij

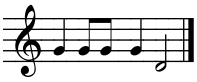
dat: $$x = r\cos\theta$$
en: $$y = r\sin\theta$$
Dus geldt ook: $$a = r_1\cos\theta_1$$ $$b = r_1\sin\theta_1$$
en natuurlijk: $$c = r_2\cos\theta_2$$ $$d = r_2\sin\theta_2$$
Maar dan geldt: $$ad = r_1 r_2\cos\theta_1\sin\theta_2$$ $$bc = r_1 r_2\sin\theta_1\cos\theta_2$$
alsmede: $$ac = r_1 r_2\cos\theta_1\cos\theta_2$$ $$bd = r_1 r_2\sin\theta_1\sin\theta_2$$

We hadden zojuist al: $$\tan\theta_p = \frac{ad+bc}{ac-bd}$$
en dat is dan: $$\tan\theta_p = \frac{r_1 r_2\cos\theta_1\sin\theta_2 + r_1 r_2\sin\theta_1\cos\theta_2}{r_1 r_2\cos\theta_1\cos\theta_2 - r_1 r_2\sin\theta_1\sin\theta_2}$$

Daarin hebben *teller* en *noemer* een gemeenschappelijke factor $\boldsymbol{r_1 r_2}$ en zolang die niet *nul* is kunnen we dat tegen elkaar wegstrepen. Als ie wel *nul* is, is minstens één der factoren *nul* en dan zitten we in de oorsprong. Daar is $\boldsymbol{\theta}$ gewoon betekenisloos (net zoals bijv. de oosterlengte van de Noordpool).

Het resulteert in: $$\tan\theta_p = \boldsymbol{\frac{\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2}{\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2}}$$

ofwel: $$\tan\theta_p = \frac{\textbf{socialisten}}{\textbf{conservatieven}}$$



Dit betekent: $$\boldsymbol{\tan\theta_p = \frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{\cos(\theta_1+\theta_2)} = \tan(\theta_1 + \theta_2)}$$

Zie je wat hier feitelijk staat?

 Copyright © 2025, Henk Reints, MSc.

Het *argument* van een *product* is de <u>som</u> der *argumenten* beider factoren!

We hadden al:

De *straal* van een *product* is het product van de *stralen* van beide factoren!

Hè hè, eindelijk houdt ie 's op met dat ouderwetse *der* en dat vreselijk oubollige *beider*.

Als nu de oorspronkelijke getallen beide een *straal* hebben gelijk aan $\mathbf{1}$, dan is *vermenigvuldiging* dus gewoon <u>*optelling*</u> van de *argumenten*! Van die hoeken dus!. Maar is het optellen van hoeken niet doodgewoon een *rotatie*? Verdraaid, ja! Om duizelig van te worden. *Vermenigvuldiging* van *complexe* getallen met *absolute waarde* één is een *rotatie* in het *complexe* vlak. Wel *verdraaid*, had ik niet al een paar keer over *draaiing* zitten zeuren? Hopelijk snap je nu waarom. *Complexe* wiskunde is *verdraaid* handig om *draaiende* dingen te beschrijven, *draai* daar maar een puntje aan, *verdraaide draai*oor!

De *absolute waarde* ofwel *straal* is gewoon een *reëel* getal waarmee we als vanouds *vermenigvuldigingen* kunnen doen (maar géén rechtstreekse *optellingen*, vergis je niet!). Bij vermenigvuldigen van *complexe* getallen moet je dus gewoon de *absolute waardes* vermenigvuldigen en verder is het een doodsimpele *rotatie*!

Met name een *vermenigvuldiging* met $\boldsymbol{i}$ is gewoon een *rotatie* in het *complexe vlak* over $\boldsymbol{\pi/2}$, oftewel $90°$ tegen de klok in (heb je geleerd dat dát de *wiskundig positivieve draairichting* is?). Vanwege $|\boldsymbol{i}| = \mathbf{1}$ verandert de *straal* niet en dan is het een *pure rotatie*, zie je dat? En $\times(-\boldsymbol{i})$ resulteert dan natuurlijk in een kwartslag *clockwise*[7].

En dan dit: er bestaat een (*reëel*) getal dat we $\boldsymbol{e}$ noemen en Leonhard Euler (bitte auf Deutsch aussprechen) heeft daaromtrent heel veel ontdekt. Het getal $\boldsymbol{e}$ op zich heeft ie niet zelf gevonden, maar $\boldsymbol{e}$ heet i.i.g. het *getal van Euler*. Ik ga er hier niets over uitleggen, maar de waarde

is met 15 cijfers achter de punt[8]: $\approx \mathbf{2.718281828459045}$

Als je het getal $\boldsymbol{e}$ al kende, dan wist je die $\mathbf{2.7}$ natuurlijk al. Daarachter is het hééél simpel. Er staat dan namelijk ***<u>TWEE</u>*** keer $\mathbf{1828}$ en dat is het geboortejaar van **Tolstoi**, die kennelijk iets met een ***geodriehoek*** deed. Appeltje eitje. Weet je op je zesennegentigste nog steeds.

Nu heeft Euler een heel *heel* **heel *heel <u>hééél</u>*** belangrijke formule gevonden.

DE formule van Euler: $\boldsymbol{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$ beschrijft een *cirkel*

de *abs. waarde* = *straal* daarvan is: $\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1$ en wel de *eenheidscirkel*!

Met $\boldsymbol{\theta = \pi}$ $(\cos\pi = -1,\ \sin\pi = 0)$: $\boldsymbol{e^{\pi i} + 1 = 0}$ **de mooiste formule aller tijden!**

*Een prachtige samenkomst van de aller-, **aller-**, **<u>áller</u>**belangrijkste vijf getallen die er maar bestaan!*

Deze formule van Euler wordt zowel in de fundamentele als in de toegepaste wetenschap héél vaak gebruikt voor vrijwel álles met *trillingen*, *golven* of *rotaties*, met name voor electr(omagnet)ische dingen zoals <u>jóúw</u> radio, magnetron, GSM, satnav, WiFi, Bluetooth & bluetoothoordopjes, noem maar op.

Ook geldt uiteraard: $\boldsymbol{re^{i\theta} = r\cos\theta + i\cdot r\sin\theta}$ [E]

Dan is vermenigvuldiging: $\boldsymbol{r_p e^{i\theta_p} = r_1 e^{i\theta_1}\cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2\cdot e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}}$

en moest je bij vermenigvuldiging van machten niet de exponenten optellen?

Het *product* is dus: $\boldsymbol{r_p e^{i\theta_p} = r_1 r_2\cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}}$ **product absolute waardes, som argumenten!**

In de *complexe* wiskunde valt álles kéúrig op zijn plek!

Laten we nog even teruggaan naar de *vierkantsvergelijking*.

Ik pik er zo maar eentje: $\boldsymbol{x^2 + 2x + 2 = 0}$

dus: $a = 1,\ b = 2,\ c = 2$

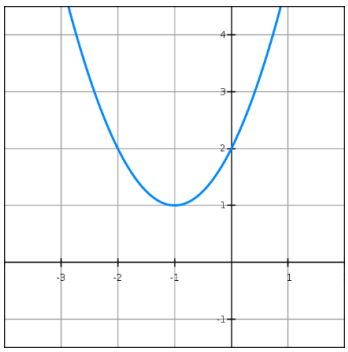
In de grafiek zie je al dat: $y = x^2 + 2x + 2$

géén nulpunten heeft en dat blijkt natuurlijk ook uit de discriminant:

$$\boldsymbol{D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = 4 - 8 = -4 < 0}$$

die dus duidelijk negatief is.

Dit betekent echter alleen maar dat er **geen *reële* oplossingen** zijn!



[7] Als Nederlands sprekende Nederlander houd ik eigenlijk niet zo van plotseling opduikende Engelse kreten waarvoor ook goede Nederlandstalige uitdrukkingen bestaan, maar vooruit, ééntje dan.
Heb je trouwens in de gaten dat *Nederlandstalig* zelf ook Nederlandstalig is? Dat heet een *autosemanticum* = "betekent zichzelf". *Vijflettergrepig* en *elfletterig* zijn dat ook en zou *woord* een woord zijn? Enwadagjevan *oupəɹsɟəqoʌəu*? Gekke Henkie!

[8] **We moeten de decimaalkomma *<u>af</u>*schaffen en áltijd een punt gebruiken!** De komma scheidt immers ook lijstelementen. Welke getallen staan er bijv. in: $\{1{,}41{,}2{,}72{,}3{,}14\}$? Wát gij ook zegge, ík zal dat beslist ontkennen...

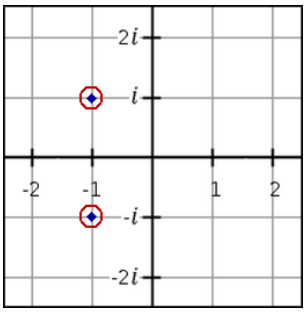
 Copyright © 2025, Henk Reints, MSc.

Let maar eens op:

$$\boldsymbol{x_{1,2}} = \frac{-2\pm\sqrt{D}}{2} = \frac{-2}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2} = -1 \pm \sqrt{\frac{D}{4}}$$

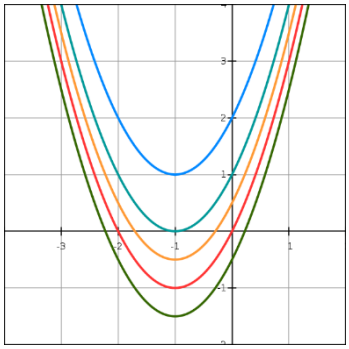
$$= -1 \pm \sqrt{\frac{-4}{4}} = -1 \pm \sqrt{-1} = \boldsymbol{-1 \pm i}$$

We hebben **twee *complexe* oplossingen!**



En hier liggen ze in het *complexe* vlak!

Uiteraard[9] zijn de hier gebruikte getallen slechts een voorbeeld. Élke *vierkantsvergelijking* heeft in het *complexe* vlak twee oplossingen die eventueel wel zouden kunnen samenvallen en dan is er per saldo dus maar één. Als je een parabool (die naar boven open is) vanuit negatieve $\boldsymbol{y}$ steeds verder omhoog schuift (van **donkergroen** naar **cyaanblauw** in onderstaande afbeelding) komen de *reële* nulpunten steeds dichter bij elkaar. Zodra hij echter met zijn *minimum*[10] precies (**donkercyaan**) op de x-as zit, vallen die twee *reële* nulpunten samen en dan is er per saldo dus maar één. Ze zoenen elkaar dus even en als je de parabool dan nog verder omhoog schuift gaan de nulpunten weer uit elkaar in tegenovergestelde *imaginaire* richting en dan zijn het twee *niet-reële complexe* [ik definieer: *irreëel* ≔ *complex* maar niet *reëel*] nulpunten die als het ware verstoppertje spelen (altviolisten spelen echter nooit verstoppertje, want niemand gaat ze zoeken). Uiteraard is het soortgelijk als de parabool naar beneden open is, maar dan schuif je dus omlaag en het *minimum* is dan een *maximum*.



cyaanblauw[11]:	$y = x^2 + 2x + 2$	**twee *complexe* wortels:**	$x = -1 \pm i$
donkercyaan:	$y = x^2 + 2x + 1$	**twee samenvallende *reële* wortels:**	$x = -1 \pm 0$
oranje:	$y = x^2 + 2x + 1/2$	**twee *reële* wortels:**	$x = -1 \pm \sqrt{2}/2$
karmijnrood:	$y = x^2 + 2x$	**twee *reële* wortels:**	$x = -1 \pm 1 = \{0, -2\}$
donkergroen:	$y = x^2 + 2x - 1/2$	**twee *reële* wortels:**	$x = -1 \pm \sqrt{3/2}$

De *nulpunten* van een vergelijking noemen we ook wel *wortels*. Dat is een ander soort wortel dan de wortel uit een getal, zoals bijv. $\sqrt{2}$ en dat flauwe grapje van het paard van Sinterklaas zal ik maar niet herhalen, dus dat wordt dan *Rudolph the Reindeer*... Met name in geval van *polynomen* gebruiken we de term *wortel* vrij vaak. *Polynomen* zijn vergelijkingen van de vorm:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

Zie je dat je — als ie maar tot en met a_2x^2 gaat — gewoon een *vierkantsvergelijking* overhoudt? Eigenlijk had ik hier i.p.v. $\boldsymbol{x}$ de variabele $\boldsymbol{z}$ moeten gebruiken; we zijn immers op zoek naar de *complexe wortels* van een polynoom.

Als de hoogste macht van $\boldsymbol{x}$ nu $\boldsymbol{n}$ is, dan noemen we het een $\boldsymbol{n}$*-degraadspolynoom* of $\boldsymbol{n}$*-degraadsvergelijking*. En wat blijkt? Een $\boldsymbol{n}$*-degraadspolynoom* heeft $\boldsymbol{n}$ *complexe wortels*! Die mogen overigens best *reëel* zijn. Heb je in de gaten dat *reële* en *imaginaire* getallen óók gewoon *complexe* getallen zijn? Wel kunnen nulpunten paarsgewijs samenvallen (als een locaal *minimum* of *maximum* nul is), zodat het er effectief minder zijn. Bij een *parabool* hoort uiteraard een *tweedegraadsvergelijking* (*vierkantsvergelijking*).

---

[9] *Uiteraard* = *uit der aard* = volgend uit hoe e.e.a. in elkaar zit.

[10] *Minimum*: in de aluminiumindustrie bestaan ruime omzetschommelingen en vooral die diepe dips die dat debiteren dienen dus duidelijk de deugdelijkheid der markt niet. Derhalve doen ze aan maximale *aluminiumminimumminimalisatie*.

[11] Deze kleuren heb ík niet bedacht; ik maak grafieken vaak op https://www.graphsketch.com/ en dáár komen ze vandaan.

 Copyright © 2025, Henk Reints, MSc.

Teken zelf eens een grafiek van een derde- of vijfdegraadspolynoom (verzin er maar een). Zie je dat polynomen met een *oneven graad* áltijd minstens één *reële* wortel hebben? De overige wortels kunnen (paarsgewijs) *irreële* getallen zijn. Een *even* polynoom kan echter in zijn geheel boven of onder de x-as liggen en dan heeft ie nul *reële* wortels, maar wel *irreële*, waarvan het aantal gelijk is aan de graad van het polynoom. En pas op: de x- & y-as in de *grafiek* (met die parabool) en de *reële* & *imaginaire* as in het *complexe vlak* (met de nulpunten van die grafiek) zijn níét hetzelfde!

Kijk nu nog eens eventjes naar de afbeelding die iets verder terug staat: die *irreële* wortels liggen — in de *imaginaire* richting — aan weerskanten van het enkelvoudige *reële* nulpunt dat eigenlijk twee samenvallende is. Huh? *Twee* iets *is*?[12] Het gebeurt nogal eens dat we *complexe*getallenparen[13] hebben van de vorm $\{\boldsymbol{a+bi},\ \boldsymbol{a-bi}\}$. We noemen $\boldsymbol{a+bi}$ en $\boldsymbol{a-bi}$ (die dus hetzelfde *reële* deel hebben en het *tegenovergestelde imaginaire*) elkaars *complex geconjugeerde* of kortweg *geconjugeerde*. Dat noteren we met een streepje boven de variable en dan hebben we dus: $\boldsymbol{z}$ & $\boldsymbol{\bar{z}}$. Van een polynoom zijn de *irreële wortels* altijd wederzijds *geconjugeerde* paren, wat ik hier niet bewijs, maar het komt doordat in de oplossing van de *vierkantsvergelijking* $\boldsymbol{\pm\sqrt{b^2-4ac}}$ *imaginair* kan zijn met dus tegengestelde tekens.

Nu geldt:
$$\boldsymbol{z\bar{z}} = (\boldsymbol{a+bi})(\boldsymbol{a-bi}) = \boldsymbol{a\cdot a + a\cdot(-bi) + bi\cdot a} + (\boldsymbol{bi})\cdot(\boldsymbol{-bi})$$
$$= a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$$
dus wat blijkt?
$$\boldsymbol{z\bar{z} = r^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2}$$
Tadááah!

Dit *product* is een *reëel* getal & ook de *som* van *geconjugeerden* is een *reëel* getal. Mooi toch? Of niet soms? Nee? Kom dan maar 's effe mee!

Nu willen we alle *wortels* weten van bijv. $\boldsymbol{z^5 = p}$ waarbij $\boldsymbol{p}$ een willekeurig positief *reëel* getal is. Denk nog even aan de *vermenigvuldingsregel*: de *stralen* moet je gewoon vermenigvuldigen. Maar betekent dat dan niet dat dat dan in dit voorbeeld dan is dat dat dan, dat dat dan, dat dat dan **Páts!** zo is dat álle wortels een *straal* hebben van $\boldsymbol{r = \sqrt[5]{p}}$? Ze liggen dus allemaal even ver bij de *nul* vandaan. Wel *verdraaid*, dan liggen ze op een *cirkel* rondom de oorsprong in het *complexe vlak*!

En *argumenten* moest je optellen, nietwaar? En je weet toch dat machtsverheffen herhaalde vermenigvuldiging is? Moet je dan niet het *argument* van een wortel gewoon met *vijf* (in dit voorbeeld) vermenigvuldigen om uit te komen op $\boldsymbol{\arg(p)}$? En $\boldsymbol{p}$ was toch positief *reëel*? Geldt dan niet $\boldsymbol{\arg(p) = 0}$? En zie je dat je daar zo vaak als je maar wilt gewoon $\boldsymbol{2\pi}$ bij kunt optellen? Gewoon rondjes blijven *draaien*, toch? Betekent dit dan niet dat $\boldsymbol{\arg(p) = k\cdot 2\pi}$ en $\boldsymbol{\arg(z) = k\cdot 2\pi/5}$?

In de praktijk is $\boldsymbol{\theta \geq 2\pi}$ niet zinvol, maar je moet er in eerste instantie **wel dégelijk rekening mee houden!** We delen immers door $\boldsymbol{5}$. Als resultaat hebben we echter alleen $\boldsymbol{0 \leq \arg(z) < 2\pi}$ nodig.

En had die *vijf* ook een ander positief geheel getal mogen zijn, bijv. $\boldsymbol{n}$?

De wortels van: $\boldsymbol{z^{(n\in\mathbb{N})} = (p\in\mathbb{R}) > 0}$ snap je *goed* wat hier staat?
liggen in het *complexe vlak* op een *cirkel*
rondom *nul* met een *straal* gelijk aan: $\boldsymbol{r = \sqrt[n]{p}}$
en hun *argumenten* zijn: $\boldsymbol{\theta_k = (k\in\mathbb{Z})\cdot 2\pi/n\ \mathrm{mod}(2\pi)}$

Die **mod** (modulo) betekent *rest* bij deling door $\boldsymbol{2\pi}$. Daarmee *reduceren* we het tot $\boldsymbol{0 \leq \theta < 2\pi}$.

Deze *wortels* vormen dus een *regelmatige* $\boldsymbol{n}$*-hoek* met één van die hoeken op de positieve *reële* as! De *wortel* met het kleinste *argument* (nadat we $\boldsymbol{\mathrm{mod}(2\pi)}$ hebben gedaan) heet in het Engels *principal root* & op z'n Nederlands *hoofdwortel*.

En nu kan dit ook voor $\boldsymbol{p < 0}$. Dan geldt: $\boldsymbol{\arg(p) = \pi + k\cdot 2\pi}$ en uiteraard is $\boldsymbol{r}$ altijd *reëel* en positief, dus: $\boldsymbol{r = \left|\sqrt[n]{p}\right| = \sqrt[n]{|p|}}$. Het eindresultaat is t.o.v. het vorige links/rechts (d.w.z. *reëel* negatief resp. positief) gespiegeld in het *complexe vlak*. Als $\boldsymbol{p > 0}$ is de *hoofdwortel* een positief *reëel* getal, zoals bijv. $\sqrt{2}$ (héé, zou dat dan tóch wél net zo'n soort wortel zijn?), maar voor $\boldsymbol{p < 0}$ is ie *complex* met $\boldsymbol{\theta = \pi/n}$.

Voorbeeld 1:
$$\boldsymbol{z^2 = 2}$$
levert:
$$\boldsymbol{z \in \{+\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\}}$$
en de *hoofdwortel* is:
$$\boldsymbol{z = +\sqrt{2}}$$

[12] Jazeker! "*Het enkelvoudige reële nulpunt dat*" is hier het *onderwerp* van de zin en dat is toch écht *enkelvoud*, dus moet het *gezegde* — dat moet gezegd — ook in het *enkelvoud*! Meervoud is enkel fout...

[13] *Complexegetallenparen* is één woord! Net als *bruinebonensoep* = willekLeurige soep van bruine bonen; *bruine bonensoep* is bruine soep van willekLeurige bonen (en *blauwebonensoep* is *bloedrood* ☠).

 Copyright © 2025, Henk Reints, MSc.

Jawel! Het is dus toch wel degelijk hetzelfde: de *wortel* uit een *positief getal* $\boldsymbol{p}$ is de *hoofdwortel* van de *vierk.vgl.*: $\boldsymbol{x^2 - p = 0}$ (die met $+\sqrt{\boldsymbol{D}}$). Hij heet ook wel *vierkantswortel* (Engels: *square root*). En wat was ook alweer de definitie van i ? Wel, dat was: $i^2 = -1 \therefore i = \pm\sqrt{-1}$ en we <u>*kozen*</u> $i = +\sqrt{-1}$. De *hoofdwortel* dus!

Voor *complexe* getallen geldt echter ***niét***: $\sqrt{\boldsymbol{z_1}}\sqrt{\boldsymbol{z_2}} = \sqrt{\boldsymbol{z_1 z_2}}$; dat geldt alleen voor positieve *reële* getallen! Kijk maar eens: $\sqrt{\boldsymbol{-1}} \cdot \sqrt{\boldsymbol{-1}} = \boldsymbol{i \cdot i = -1}$, maar: $\sqrt{\boldsymbol{(-1)\cdot(-1)}} = \sqrt{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{+1}$, dus: $\boldsymbol{-1 = +1}$ **?** Correct is: $\sqrt{\boldsymbol{-1}} = \pm\boldsymbol{i}$ en $(+\boldsymbol{i})\cdot(-\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{+1}$. Zie je dat hier twee *geconjugeerden* staan?

<u>Voorbeeld 2:</u> $\boldsymbol{z^3 = 8}$

Denk nu even goed na over wat ik hierboven net heb uitgelegd. We zoeken drie wortels als regelmatige veelhoek (in dit geval dus een gelijkzijdige driehoek!) met de hoekpunten op een cirkel met $\boldsymbol{r = \sqrt[3]{8} = 2}$. Daarvoor gebruiken we vergelijking [E] op blz.5 en vinden:

$$\boldsymbol{z} \in \{\, \boldsymbol{r}(\cos[\boldsymbol{0}\pi/3] + i\sin[\boldsymbol{0}\pi/3]),\ \boldsymbol{r}(\cos[\boldsymbol{2}\pi/3] + i\sin[\boldsymbol{2}\pi/3]),\ \boldsymbol{r}(\cos[\boldsymbol{4}\pi/3] + i\sin[\boldsymbol{4}\pi/3])\,\}$$

oftewel: $\boldsymbol{z} \in [\ \left\{2,\ 2\left(\frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right),\ 2\left(\frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right\} = \{\ \boldsymbol{+2},\ \boldsymbol{-1 + i\sqrt{3}},\ \boldsymbol{-1 - i\sqrt{3}}\,\}\ ]$

met als *hoofdwortel*: $\boldsymbol{z = +2}$

<u>Voorbeeld 3:</u> $\boldsymbol{z^3 = -8}$

geeft: $\boldsymbol{z} \in \{\ \boldsymbol{-2},\ \boldsymbol{+1 + i\sqrt{3}},\ \boldsymbol{+1 - i\sqrt{3}}\,\}$

Hoofdwortel: $\boldsymbol{z = 1 + i\sqrt{3}}$ Jazeker! Kleinste argument.

Bestudeer deze voorbeelden góéd totdat je ze écht snapt!

Zouden we nu ook de $\boldsymbol{n}$-demachtswortel uit een willekeurig *complex* getal kunnen berekenen,

oftewel: $\boldsymbol{w = \sqrt[n]{z}}$

waarbij $\boldsymbol{w} \in \mathbb{C},\ \boldsymbol{z} \in \mathbb{C},\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$?

Wel, dan geldt natuurlijk dat: $\boldsymbol{w^n = z}$

en je kunt aan formule [E] op blz.5 zien dat we élk en íéder *complex* getal kunnen schrijven

als: $\boldsymbol{re^{i\theta}}$

dus: $\boldsymbol{w = r_w e^{i\theta_w}}$

en: $\boldsymbol{z = r_z e^{i\theta_z}}$

Moesten we bij een *product* niet de *stralen vermenigvuldigen* en de *argumenten optellen* en dat laatste dan **modulo** $\boldsymbol{2\pi}$ nemen? Hoe zou dat dan moeten voor machtsverheffen?

Nou, zo dus: $\boldsymbol{w^n = r_w^n e^{ni\theta_w}}$ **overtuig jezelf hiervan!**

maar dan hebben we toch: $\boldsymbol{r_w^n e^{ni\theta_w} = r_z e^{i\theta_z}}$?

Daaruit blijkt eenvoudig dat: $\boldsymbol{r_w = \sqrt[n]{r_z}}$

alsmede: $\boldsymbol{ni\theta_w = \theta_z}$

maar nu moeten we weer om *nul* heen ***<u>draaien</u>*** en dan krijgen we: $\boldsymbol{\theta_w = [(\theta_z + (k \in \mathbb{Z})\cdot 2\pi)/n]\ \mathrm{mod}(2\pi)}$

En met deze $\boldsymbol{\theta_w}$ geldt dan: $\boldsymbol{w = \sqrt[n]{r_z}(\cos\theta_w + i\sin\theta_w)}$

en dat is in essentie de formule van De Moivre. 't Is maar dat je 't weet.

Zou $(\boldsymbol{n \neq 0}) \in \mathbb{R}$ ook kunnen? Wat denk je? En $(\boldsymbol{n \neq 0}) \in \mathbb{C}$? Zeker & vast!

En voor wie iets van ***logaritmes*** weet (logaritme van een product is som der logaritmes van de factoren!):

$$\boldsymbol{\ln z = \ln re^{i\theta} = \ln re^{i(\theta + k\cdot 2\pi)} = \ln r + \ln e^{i(\theta + k\cdot 2\pi)}}$$

de **blauwe stap** is belangrijk!

$$\boldsymbol{= \ln r + i(\theta + k\cdot 2\pi)}$$

$$\boldsymbol{= \ln|z| + i(\arg(z) + k\cdot 2\pi)}$$

Derhalve: $\boldsymbol{\ln[(x \in \mathbb{R}) < 0] = \ln(-x) + i(\pi + k\cdot 2\pi)}$

De logaritme van een negatief getal bestaat dus wel dégelijk, maar dan als *complex* getal. Zie je dat $\boldsymbol{k\cdot 2\pi}$ nu níét om *nul* draait, maar dat het een oneindige rij is op de *imaginaire* as? Dan moet je dus géén $\boldsymbol{\mathrm{mod}(2\pi)}$ doen! Maar je mag $\boldsymbol{\ln z = \ln|z| + i\cdot\arg(z)}$ wel de *hoofdlogaritme* noemen.

En oh ja, in $\boldsymbol{z = a + bi}$ of $\boldsymbol{z = x + iy}$ zijn $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$ & $\boldsymbol{y}$ altijd *reële* getallen en $\boldsymbol{z}$ is *complex*. Ook $\boldsymbol{r}$ & $\boldsymbol{\theta}$ zijn natuurlijk reëel. En $\cos\theta + \underline{i}\cdot\sin\theta$ wordt — uit gemakzucht — ook wel $\mathbf{cis}\,\theta$ genoemd en dat heeft niets met muziek te maken. Hoewel, muziek = geluid = *trillingen*, *golven*? Ja, *complexe getallen*!

Plaudite amici, comedia finita est.
Applaus, vrienden, het spel is ten einde.

 Copyright © 2025, Henk Reints, MSc.

Appendix

Laten we toch ook nog maar even kijken naar *deling* van *complexe* getallen. In *poolcoördinaten* is dat heel eenvoudig: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

maar omdat we graag altijd $\mathbf{0 \le \theta < 2\pi}$ hebben moet je nu nog wel de resulterende $\boldsymbol{\theta = \theta_1 - \theta_2}$ *normaliseren/reduceren*, d.w.z. er net zo vaak $\mathbf{2\pi}$ bij optellen of aftrekken als nodig is om aan die wens/eis te voldoen. Word je een beetje *draai*erig van, nietwaar?

En dan hebben we ook nog: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di}$

We vinden het echter niet zo fijn als i in de *noemer* voorkomt. Maar daarvoor bestaat een trucje!

Je weet/ziet/snapt toch wel dat: $(p+q)(p-q) = p^2 - q^2$? (dus met zónder producttermen!)

Dat passen we als volgt toe op de *noemer* van die *complexe* breuk (nee, je hoeft niet naar de dokter 😊):

we vermenigvuldigen de breuk eerst met: $\mathbf{1 = \frac{c-di}{c-di}}$ (zie je 2 × de ***geconjugeerde*** van de oorspr. noemer?)

en dan: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac-adi+bi\cdot c-bi\cdot di}{c^2-d^2i^2} = \frac{ac+(bc-ad)i-bdi^2}{c^2+d^2} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\boldsymbol{i}$

Simpel, maar tóch eenvoudig... Had je er al aan gedacht dat de noemer niet *nul* mag zijn? Dus dat $c \pm di \neq 0$? Zoek zelf zeer zuivere zekerheid omtrent wat het betekent als dat wél *nul* is.

En wellicht vind je het volgende ook nog wel interessant:

sinus hyperbolicus: $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

cosinus hyperbolicus: $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (kettinglijn, vorm van een aan 2 punten hangende ketting)

Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Voor de sinus bestaat de reeks: $\sin x = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$

en die heeft alleen *oneven* machten van x, dus kunnen we áltijd het eventuele minteken van $\boldsymbol{x}$ buiten haakjes halen, zodat: $\sin(-x) = -\sin x$

Soortgelijk geldt: $\cos x = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

met alleen *even* machten van $\boldsymbol{x}$, dus: $\cos(-x) = \cos x$

Nu *definiëren* we de *complexe* (co)sinus als precies dezelfde reeksen, maar dan met $\boldsymbol{z}$ i.p.v. $\boldsymbol{x}$. Voor $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}$ verandert er dan niets. Wel kunnen we dan het minteken áltijd op dezelfde wijze afhandelen. Dazwelzofijn.

We definiëren $\boldsymbol{z}$ nu zodanig dat: $\theta = iz$

en dan geldt: $e^{i\theta} = e^{i\cdot iz} = e^{-z} = \cos(iz) + i\sin(iz)$ [1]

alsmede: $e^{-i\theta} = e^{-i\cdot iz} = e^{z} = \cos(-iz) + i\sin(-iz)$

2 × afhandeling minteken: $= \cos(iz) - i\sin(iz)$ [2]

Optelling van [2] en [1]: $e^z + e^{-z} = 2\cos(iz)$

levert: $\cos(iz) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z$

Het verschil tussen [2] en [1] is: $e^z - e^{-z} = -2i\sin(iz)$

dus: $\sin(iz) = \frac{e^z - e^{-z}}{-2i} = \frac{i}{i}\cdot\frac{e^z - e^{-z}}{-2i} = i\frac{e^z - e^{-z}}{2} = i\sinh z$

Samengevat: $\boldsymbol{\sin(iz) = i\sinh z}$
$\boldsymbol{\cos(iz) = \cosh z}$

Nu definiëren we $\boldsymbol{w}$ zodanig dat: $z = iw$

en dan geldt: $i\sinh iw = \sin(i\cdot iw) = \sin(-w) = -\sin(w)$

alsmede: $\cosh iw = \cos(i\cdot iw) = \cos(-w) = \cos(w)$

En nou *her*definiëren we: $z = w$

zodat: $\boldsymbol{\sin(z) = -i\sinh iz}$
$\boldsymbol{\cos(z) = \cosh iz}$

Copyright © 2025, Henk Reints, MSc.